DIRECTION DE LA MÉTÉOROLOGIE NATIONALE
ÉCOLE NATIONALE DE LA MÉTÉOROLOGIE
CONCOURS EXTERNE 1993
D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX DE LA MÉTÉOROLOGIE
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES (1)
Durée : 3 heures
Coefficient t : 2

———-

Un corrigé

Partie I

1. Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et λ un nombre complexe. On a :

$$\operatorname{Tr}(A+\lambda B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+\lambda b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{Tr}(A) + \lambda \operatorname{Tr}(B).$$

Donc T est bien linéaire.

2. Posons $C = AB = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $D = BA = (d_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, avec $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ et $d_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$, donc :

$$\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \operatorname{Tr}(BA).$$

3. Si M et M' sont semblables, alors il existe P inversible tel que $M' = P^{-1}MP$ et donc

$$\operatorname{Tr}(M') = \operatorname{Tr}(P^{-1}MP) = \operatorname{Tr}(PP^{-1}M) = \operatorname{Tr}(M).$$

4. La matrice étant trigonalisable puisque le corps de base est $\mathbb{C}$. Il existe donc une matrice triangulaire supérieure

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et une matrice inversible P telles que $T = P^{-1}AP$. Alors $A^k = PT^kP^{-1}$, pour tout entier naturel k, d'où

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

et par conséquent

$$S_k = \operatorname{Tr}(A^k) = \operatorname{Tr}(PT^kP^{-1}) = \operatorname{Tr}(T^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k. \tag{1}$$

Partie II

1. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $l_{ij} = -(1)^{i+j} \det D_{ij}$. Le coefficient d'indices i, j du produit $Al(A)$ est $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} l_{jk}$. Le coefficient d'indices i, j du produit $l(A)A$ est $\sum_{h=1}^{n} l_{hi} a_{hj}$.

• Pour $i = j$, nous avons déjà que ces coefficients valent $\det A$.

• Il reste à montrer qu'ils sont nuls pour $i \neq j$. On sait que le cofacteur d'indices h, i est égal au déterminant de la matrice $n \times n$ déduite de A en remplaçant la i-ième colonne de A par le vecteur e_h, dont la h-ième coordonnée vaut 1 et les autres sont nulles. Par la n linéarité, $\sum_{h=1}^{n} A_{hi} a_{hj}$ est le déterminant déduit de A en remplaçant la i-ième colonne par la j-ième. Mais alors, la i-ième colonne et la j-ième sont identiques, donc le déterminant est nul. On obtient l'autre résultat en échangeant le rôle des lignes et des colonnes.

D'où $l(A)A = Al(A) = (\det A)\, I_n$. En particulier $l(A)$ et A commutent.

2. La dérivation d'un produit donne $P'(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i \neq j} (\lambda - \lambda_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_j}$ et donc $\frac{P'(\lambda)}{P(\lambda)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda - \lambda_j}$.

3. (a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (\lambda - z)(b_0 \lambda^{n-1} + b_1 \lambda^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + b_n \\ &= b_0 \lambda^n + (b_1 - b_0 z)\lambda^{n-1} + (b_2 - b_1 z)\lambda^{n-2} + \ldots + (b_{n-1} - b_{n-2} z)\lambda + b_n - b_{n-1} z. \end{aligned}$$

D'où, par unicité des coefficients, on obtient :

$$b_0 = 1 \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!],\ b_k - b_{k-1} z = a_k.$$

(b) D'après les relations de la question précédente, on a $b_1 = a_1 + b_0 z = a_1 + z$, $b_2 = a_2 + b_1 z = a_2 + a_1 z + z^2$, puis par récurrence, $b_k = \sum_{i=1}^{k} a_i z^{k-i} + z^k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

(c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_i} = b_0 \lambda^{n-1} + b_1 \lambda^{n-2} + \ldots + b_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \lambda^{n-k-1}$, avec $b_0 = 1$.

Mais $b_k = \sum_{i=1}^{k} a_i z^{k-i} + z^k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. D'où $\frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_i} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j \lambda_i^{k-j} \right) \lambda^{n-k-1}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} P'(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j \lambda_i^{k-j} \right) \lambda^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j \lambda_i^{k-j} \right) \lambda^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{k-j} \right) \lambda^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j S_{k-j} \right) \lambda^{n-k-1} \end{aligned}$$

D'où, par unicité des coefficients de P', on a $(n-k)a_k = \sum_{j=0}^{k} a_j S_{k-j}$ et comme $a_0 = 1$ et $S_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 = n$ alors

$$S_k + a_1 S_{k-1} + \ldots + a_{k-1} s_1 + k a_k = 0 \qquad (2)$$

.

4. D'après la formule $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} l(A)$, on a $\det(A^{-1}) = \left(\dfrac{1}{\det A}\right)^n \det l(A)$ et donc $\det l(A) = (\det A)^{n-1}$. Donc, si A est inversible il est de même de $l(A)$ et donc $l(A)^{-1} = \dfrac{1}{\det l(A)} l(l(A))$. D'où $l(l(A)) = \det l(A) l(A)^{-1} = (\det A)^{n-1} \dfrac{A}{\det(A)} = (\det A)^{n-2} A$.

5. En supprimant une ligne et une colonne de la matrice $l(\lambda I - A)$, on supprime un terme en λ et par conséquent les cofacteurs sont des éléments de $\mathbb{C}_{n-1}[\lambda]$ (algèbre dont les éléments sont le polynôme nul et les polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$).
Il en résulte l'écriture $l(\lambda I - A) = \lambda^{n-1} B_0 + \lambda^{n-2} B_1 + ... + \lambda B_{n-2} + B_{n-1}$ où les matrices B_k sont des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

6. Pour chaque $0 \le l \le k$, on pose $C_l = (c^l_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Si $\lambda^k C_0 + \lambda^{k-1} C_1 + ... + C_k = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, alors ceci entraine $\lambda^k c^0_{ij} + \lambda^{k-1} c^1_{ij} + ... + c^k_{ij} = 0$ pour tout couple (i,j) et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, donc les coefficients c^l_{ij} sont nuls pour tout (i,j) et pour tout k, donc $C_l = 0$ pour tout $l \in [\![0, k]\!]$.

7. D'après l'égalité $(\lambda I - A) l(A) = \det(\lambda I - A) I$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \ (\lambda I - A) Q(\lambda) = \det(\lambda I - A).I_n \tag{3}$$

donc, on obtient en développant le produit de gauche dans (3)

$$AB_0 + \lambda(AB_1 - A_0) + \lambda^2(AB_2 - B_1) + ... + \lambda^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) - \lambda^n B_{n-1} = \chi_A(\lambda) I_n \tag{4}$$

Par identification, coefficient par coefficient, on obtient

$$\begin{array}{rcl} B_{n-1} & = & I_n \\ B_{n-2} - AB_{n-1} & = & a_1 I_n \\ & \vdots & \\ B_0 - AB_1 & = & a_{n-1} I_n \\ -AB_0 & = & a_n I_n \end{array}$$

puis en multipliant le premier membre par A^n, le suivant par A^{n-1} et ainsi de suite, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} A^n \times B_{n-1} & = & A^n \\ A^{n-1} \times (B_{n-2} - AB_{n-1}) & = & a_1 A^{n-1} \\ & \vdots & \\ A^1 \times (B_0 - AB_1) & = & a_{n-1} A \\ A^0 \times (-AB_0) & = & a_n I_n \end{array}$$

En additionnant les équations matricielles précédentes, on obtient :

$$A^n + a_1 A^{n-1} + ... + a_{n-1} A + a_n I_n = 0. \tag{5}$$

8. (a) L'égalité $A^n + a_1 A^{n-1} + ... + a_{n-1} A + a_n I_n = 0$ s'écrit aussi $(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + ... + a_{n-1} I) A = -a_n I$. D'après la définition de P, $P(0) = \det(-A) = a_n$ et donc $a_n = (-1)^n \det(A)$, d'où : $(-1)^{n-1}(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + ... + a_{n-1} I) A = \det(A) I$ et donc $l(A) = (-1)^{n-1}(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + ... + a_{n-1} I)$.

(b)

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Tr}(l(a) & = & (-1)^{n-1} \operatorname{Tr}(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + ... + a_{n-1} I) \\ & = & (-1)^{n-1}(\operatorname{Tr}(A^{n-1}) + a_1 \operatorname{Tr}(A^{n-2}) + ... + n a_{n-1}) \\ & = & (-1)^{n-1}(S_{n-1} + a_1 S_{n-2} + ... + a_{n-2} S_1 + a_{n-1} S_0) \\ & = & (-1)^{n-1}(-(n-1) a_{n-1} + n a_{n-1}) \\ & = & (-1)^{n-1} a_{n-1}. \end{array}$$

(c) $\mathrm{Tr}(l(a) = (-1)^{n-1}a_{n-1}$.

9. (a) Si α est une valeur propre de A, alors il existe un vecteur x non nul tel que $Ax = \alpha$, la relation $l(A) = (-1)^{n-1}(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + ... + a_{n-1}I)$ entraine

$$l(A)x = (-1)^{n-1}(\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + ... + a_{n-1})x$$

Donc $R(\alpha) = (-1)^{n-1}\left(\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + ... + a_{n-1}\right)$ est une valeur propre de $l(A)$.

(b) On a $\alpha R(\alpha) = (-1)^{n-1}\left(\alpha^{n} + a_1\alpha^{n-1} + ... + a_{n-1}\alpha\right) = (-1)^{n-1}(-a_n) = (-1)^n a_n = \det(A)$. D'où

$$\alpha R(\alpha) = \det A. \tag{6}$$

Partie III

1. On vérifie facilement que $X_{n+1}(a) = \Gamma(a)X_n(a)$ où $\Gamma(a) = \begin{pmatrix} 2a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. (a) Démonstration par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

(b)

$$\begin{aligned} X_n(1) &= ((n-2)\Gamma_1 - (n-3)I_2)\, X_2 \\ &= \left[\begin{pmatrix} 2(n-2) & -n+2 \\ n+2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-3 & 0 \\ 0 & n-3 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n+1 \\ n+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n(1) = n+1$.

(c) La suite $(U_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre 2 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2}(a) - 2aU_{n+1}(a) + U_n(a)$. L'équation caractéristique associée s'écrit $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$. Donc la solution générale est de la forme $U_n(1) = an + b$ et comme $U_1(1) = 2$ et $U_2(1) = 3$, alors $U_n(1) = n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. (a) Le polynôme caractéristique de Γ_{-1} est $(X+1)^2$, donc -1 est l'unique valeur propre de Γ_{-1}. Cherchons une base de trigonalisation de Γ_{-1} (Γ_{-1} n'est pas diagonalisable puisque $\dim E_{-1}(\Gamma_{-1}) = 1 < 2$). $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à -1, on complète par le vecteur $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $\Gamma_{-1}(v) = -u - v$, donc Γ_{-1} est semblable à $T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, plus précisément on a :

$$\Gamma_{-1} = QTQ^{-1}$$

où $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_{-1}^k = QT^kQ^{-1}$.

Calculons maintenant T^k. Pour cela remarquons $T = -I_2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc, par la formule de binôme, $T^k = -I_2 + k\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \Gamma_{-1}^k = QT^kQ^{-1} = (-1)^k \begin{pmatrix} 1+k & k \\ -k & -k+1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2, on a :

$$X_n(-1) = \Gamma_{-1}^{n-2}X_2(-1) = (-1)^{n-2}\begin{pmatrix} n-1 & n-2 \\ 2-n & 3-n \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n(-1) = (-1)^n(5n-7)$.

(b) L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence s'écrit $r^2 + 2r + 1 = 0$, donc il existe des scalaires α et β tels que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n(-1) = (\alpha n + \beta)(-1)^n$ et comme $U_1(-1) = -2$ et $U_2(-1) = 3$, alors $U_n(-1) = (-1)^n(5n-7)$.

4. (a) Le polynôme caractéristique de Γ_a, $a \in]-1, 1[$, s'écrit $X^2 - 2aX + 1 = X^2 - 2\cos\theta + 1$, dont les racines sont $\lambda_1 = e^{i\theta}$ et $\lambda_2 = e^{-i\theta}$. Donc $\mathrm{Sp}(\Gamma_a) = \left\{ e^{i\theta}, e^{-i\theta} \right\}$.

(b) On vérifie facilement que $P^{-1}\Gamma_a P = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

On a $\Gamma_a = P \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} P^{-1}$ et par conséquent, $\forall k \in \mathbb{N}, \Gamma_a^k = P \begin{pmatrix} e^{ik\theta} & 0 \\ 0 & e^{-ik\theta} \end{pmatrix} P^{-1}$. D'où :

$$\begin{aligned} \Gamma_a^k &= \frac{1}{e^{2i\theta} - 1} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 1 \\ 1 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ik\theta} & 0 \\ 0 & e^{-ik\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & -1 \\ -1 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin\theta} \begin{pmatrix} \sin(k+1)\theta & \sin k\theta \\ \sin k\theta & \sin(k-1)\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) D'après la question **2.** de cette partie, $X_n(a) = \Gamma_a^{n-2} X_2(a)$. D'où :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_n(a) \\ V_n(a) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sin\theta} \begin{pmatrix} \sin(n-1)\theta & -\sin(n-2)\theta) \\ \sin(n-2)\theta) & -\sin(n-3)\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\cos 2\theta + 1 \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin\theta} \begin{pmatrix} 2\sin(n-1)\theta\cos 2\theta + \sin(n-1)\theta - 2\cos\theta\sin(n-2)\theta \\ 2\sin(n-2)\theta\cos 2\theta + \sin(n-2)\theta - 2\cos\theta\sin(n-3)\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \\ \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ U_n(a) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \tag{8}$$

••••••••• •